II. Progresii geometrice

- Un şir de numere reale nenule $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care fiecare termen începând cu al doilea se obține din termenul precedent prin înmulțirea cu acelaşi număr q se numeşte progresie geometrică.

  Numărul q se numeşte rația progresei şi

$$a_{n+1} = a_n q,\ n \geq 1.$$

  Deci un şir de numere reale nenule este progresie geometrică dacă şi numai dacă pentru orice $n \geq 1$ raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ este constant.

- Avem succesiv $a_2 = a_1 q,\ a_3 = a_2 q = a_1 q^2, a_4 = a_3 q = a_1 q^3$ şi prin inducție

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

- Caracterizarea progresiei geometrice este dată de următoarea teoremă: Şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică dacă şi numai dacă pentru orice $n \geq 2$ rezultă

$$\boxed{{a_n}^2 = a_{n+1} a_{n-1}}$$

- Suma primelor n termeni ai unei progresii artimetice este:

$$\boxed{S_n = n a_1 \text{ pentru } q = 1} \text{ şi } \boxed{S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ pentru } q \neq 1}$$

- Observație:
  1) Pentru a arăta că un şir este progresie geometrică geometrică fie arătăm că pentru orice 2 termeni consecutivi ai şirului raportul este constant, fie pentru orice $n \geq 2$

$$ {a_n}^2 = a_{n+1} a_{n-1}$$

  2) Ca şi în cazul progresiei aritmetice, dacă cunoaştem S_n atunci pentru $n = 1$ rezultă $S_1 = a_1$, iar pentru $n \geq 2$ rezultă $a_n = S_n - S_{n-1}$

Aplicații

1) Determinați al patrulea termen al unei progresii geometrice în care primul termen este 16 şi rația este $\frac{1}{2}$.

   Avem $a_4 = a_1 q^3 = 16 \cdot \frac{1}{8} = 2$

2) Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ în care$b_1 = 2$ şi $b_2 = 6$. Aflați termenul al şaselea al progresiei.

Avem

$$q = \frac{b_2}{b_1} = 3 \text{ şi}$$

$$b_6 = b_1 q^5 = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$$

3) Determinați valorile reale ale numărului x ştiind că numerele $5 - x$, $x + 7$ şi $3x + 11$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Condiția ca a, b, c să fie termeni consecutivi ai unei progresii geometrice este $b^2 = a \cdot c$ de unde rezultă

$(x + 7)^2 = (5 - x)(3x + 11)$ adică

$x^2 + 14x + 49 = 55 + 4x - 3x^2$, deci

$4x^2 + 10x - 6 = 0$ sau

$2x^2 + 5x - 3 = 0$ şi

$x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$.

4) Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = 3 - 2x$. Să se arate că numerele $f(1), f(0)$ şi $f(-3)$ sunt termini consecutive ai unei progresii geometrice.

Avem condiția $f^2(0) = f(1) \cdot f(-3)$ şi cum $f(0) = 3, f(1) = 1, f(-3) = 9$ obținem $3^2 = 1 \cdot 9$ adevărat.

5) Să se calculeze suma:

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^7}$$

Suma cerută este suma primilor opt termeni ai unei progresii geometrice cu $a_1 = 1$ şi $q = \frac{1}{3}$, deci

$S = 1 \cdot \frac{(\frac{1}{3})^8 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3^8} - 1\right) = \frac{3}{2} \cdot (1 - \frac{1}{3^8})$.

6) Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ şi
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, n$\in N^*$.

Ştiind că $2S_n = 3^n - 1, \forall n \geq 1$, să se arate că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

Din $S_n = \frac{3^n-1}{2}$ rezultă

$S_{n-1} = \frac{3^{n-1}-1}{2}$ şi

$a_n = S_n - S_{n-1}$, adică

$a_n = \frac{3^n-1-3^{n-1}+1}{2} = \frac{3^{n-1}(3-1)}{2}$ şi

$a_n = 3^{n-1}$ orice $n \geq 2$.

Rezultă $a_{n+1} = 3^n$ şi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3, n \geq 2$.

Pentru $n = 1$ avem $S_1 = a_1 = 1, a_2 = 3$ şi deci şirul este progresie geometrică cu rația 3.

7) Să se determine $a, b \in R$ ştiind că numerele $2, a, b$ sunt în progresie geometrică şi $2, 17, a$ sunt în progresie aritmetică.
Dacă $2, 17, a$ sunt în progresie aritmetică avem condiția

$\frac{a+2}{2} = 17$ şi $a = 32$.

Dacă $2, a, b$ sunt în progresie geometrică avem

$a^2 = 2b$, adică

$32^2 = 2 \cdot b$, deci

$b = 32 \cdot 16 = 512$.

8) Numerele pozitive a, b, c, d sunt în progresie geometrică. Ştiind că $d - a = 7$ şi $c - b = 2$, să se afle rația progresiei.

Avem

$b = aq, c = aq^2, d = aq^3$ şi deci

$a(q^3 - 1) = 7, aq(q - 1) = 2, q \neq 1.$

Împărțind membru cu membru ultimele 2 egalități rezultă

$\frac{q^2+q+1}{q} = \frac{7}{2}$ şi de aici

$2q^2 - 5q + 2 = 0$ cu

$q_1 = 2, q_2 = \frac{1}{2}.$

Pentru $q = \frac{1}{2}$ rezultă din $a(q^3 - 1) = 7$ că $a < 0$ care nu convine.
Pentru $q = 2$ rezultă $a \cdot 7 = 7$ deci $a = 1,\ b = 2,\ c = 4,\ d = 8.$

Propunem spre rezolvare:

1) Să se determine al nouălea termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ dacă primul termen $b_1 = 243$ şi rația $q = \frac{1}{3}$.
2) Să se determine suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, ştiind că suma primilor doi termeni este egală cu 8, iar diferența dintre al doilea termen şi primul termen este egală cu 4.
3) Să se determine $x \in R$ ştiind că numerele $x - 1,\ x + 1,\ 2x + 5$ sunt termini consecutive ai unei progresii geometrice.
4) Calculați: $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2012}$
5) Calculați produsul primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, care are primul termen $\sqrt{2}$ şi rația egală cu $-\sqrt{2}$.
6) Să se arate că numerele $1,\ \log_3 9$ şi $\sqrt[3]{64}$ sunt termeni consecutivi într-o progresie geometrică.