

II. Progresii geometrice

Teorie

- Un șir de numere reale nenule $(a_n)_{n \geq 1}$ pentru care fiecare termen începând cu al doilea se obține din termenul precedent prin înmulțirea cu același număr q se numește progresie geometrică.

Numărul q se numește rația progresei și

$$a_{n+1} = a_n q, \quad n \geq 1.$$

Deci un șir de numere reale nenule este progresie geometrică dacă și numai dacă pentru orice $n \geq 1$ raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ este constant.

- Avem succesiv $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q = a_1 q^2$, $a_4 = a_3 q = a_1 q^3$ și prin inducție

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

- Caracterizarea progresiei geometrice este dată de următoarea teoremă: Șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică dacă și numai dacă pentru orice $n \geq 2$ rezultă

$$a_n^2 = a_{n+1} a_{n-1}$$

- Suma primelor n termeni ai unei progresii aritmetice este:

$$S_n = n a_1 \text{ pentru } q = 1 \quad \text{și} \quad S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ pentru } q \neq 1$$

- Observație:

- Pentru a arăta că un șir este progresie geometrică fie arătăm că pentru orice 2 termeni consecutivi ai șirului raportul este constant, fie pentru orice $n \geq 2$

$$a_n^2 = a_{n+1} a_{n-1}$$

- Ca și în cazul progresiei aritmetice, dacă cunoaștem S_n atunci pentru $n = 1$ rezultă $S_1 = a_1$, iar pentru $n \geq 2$ rezultă $a_n = S_n - S_{n-1}$