

II. Progresii geometrice

Aplicații

- 1) Determinați al patrulea termen al unei progresii geometrice în care primul termen este 16 și rația este $\frac{1}{2}$.

$$\text{Avem } a_4 = a_1 q^3 = 16 \cdot \frac{1}{8} = 2$$

- 2) Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ în care $b_1 = 2$ și $b_2 = 6$. Aflați termenul al șaselea al progresiei.

Avem

$$q = \frac{b_2}{b_1} = 3 \text{ și}$$

$$b_6 = b_1 q^5 = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$$

- 3) Determinați valorile reale ale numărului x știind că numerele $5 - x$, $x + 7$ și $3x + 11$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Condiția ca a, b, c să fie termeni consecutivi ai unei progresii geometrice este $b^2 = a \cdot c$ de unde rezultă

$$(x + 7)^2 = (5 - x)(3x + 11) \text{ adică}$$

$$x^2 + 14x + 49 = 55 + 4x - 3x^2, \text{ deci}$$

$$4x^2 + 10x - 6 = 0 \text{ sau}$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \text{ și}$$

$$x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}.$$

- 4) Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$, $f(x) = 3 - 2x$. Să se arate că numerele $f(1)$, $f(0)$ și $f(-3)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Avem condiția $f^2(0) = f(1) \cdot f(-3)$ și cum $f(0) = 3$, $f(1) = 1$, $f(-3) = 9$ obținem $3^2 = 1 \cdot 9$ adevărat.

5) Să se calculeze suma:

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7}$$

Suma cerută este suma primilor opt termeni ai unei progresii geometrice cu

$$a_1 = 1 \text{ și } q = \frac{1}{3}, \text{ deci}$$

$$S = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = -\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3^8} - 1\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^8}\right).$$

6) Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ și

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Știind că $2S_n = 3^n - 1, \forall n \geq 1$, să se arate că $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică.

$$\text{Din } S_n = \frac{3^n - 1}{2} \text{ rezultă}$$

$$S_{n-1} = \frac{3^{n-1} - 1}{2} \text{ și}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}, \text{ adică}$$

$$a_n = \frac{3^n - 1 - 3^{n-1} + 1}{2} = \frac{3^{n-1}(3-1)}{2} \text{ și}$$

$$a_n = 3^{n-1} \text{ orice } n \geq 2.$$

$$\text{Rezultă } a_{n+1} = 3^n \text{ și } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3, n \geq 2.$$

Pentru $n = 1$ avem $S_1 = a_1 = 1, a_2 = 3$ și deci șirul este progresie geometrică cu rația 3.

7) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că numerele 2, a, b sunt în progresie geometrică și 2, 17, a sunt în progresie aritmetică.

Dacă 2, 17, a sunt în progresie aritmetică avem condiția

$$\frac{a+2}{2} = 17 \text{ și } a = 32.$$

Dacă 2, a, b sunt în progresie geometrică avem

$$a^2 = 2b, \text{ adică}$$

$$32^2 = 2 \cdot b, \text{ deci}$$

$$b = 32 \cdot 16 = 512.$$

- 8) Numerele pozitive a, b, c, d sunt în progresie geometrică. Știind că $d - a = 7$ și $c - b = 2$, să se afle rația progresiei.

Avem

$$b = aq, c = aq^2, d = aq^3 \text{ și deci}$$

$$a(q^3 - 1) = 7, aq(q - 1) = 2, q \neq 1.$$

Împărțind membru cu membru ultimele 2 egalități rezultă

$$\frac{q^2 + q + 1}{q} = \frac{7}{2} \text{ și de aici}$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0 \text{ cu}$$

$$q_1 = 2, q_2 = \frac{1}{2}.$$

Pentru $q = \frac{1}{2}$ rezultă din $a(q^3 - 1) = 7$ că $a < 0$ care nu convine.

Pentru $q = 2$ rezultă $a \cdot 7 = 7$ deci $a = 1, b = 2, c = 4, d = 8$.