

Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor

- intervine în stabilirea intervalelor de monotonie ale unei funcții derivabile și a punctelor de extrem.

Un rol important în studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor îl are teorema lui Lagrange:

- Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Reamintim:

- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este monoton descrescătoare pe I dacă $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este monoton crescătoare pe I dacă $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Teorema lui Lagrange are următoarea consecință, utilă pentru determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcții:

- Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I . Atunci
 - 1) funcția este monoton descrescătoare pe I dacă și numai dacă $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$
 - 2) funcția este monoton crescătoare pe I dacă și numai dacă $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Observații

- a) dacă f este derivabilă pe I și $f'(x) < 0, \forall x \in I$, respectiv $f'(x) > 0, \forall x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I , respectiv strict crescătoare.
- b) Etapele stabilirii intervalelor de monotonie ale unei funcții $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt următoarele:
 - se calculează $f'(x)$
 - se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$
 - se stabilește semnul funcției f' pe intervalele pe care nu se anulează
 - se stabilesc intervalele de monotonie în funcție de semnul derivatei cu ajutorul tabelului de variație al funcției.

Puncte de extrem

Reamintim:

- Dacă $f: I \rightarrow R, x_0 \in I$ este punct de minim relativ (local) dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât, $\forall x \in V \cap I$, avem $f(x) \geq f(x_0)$.
- Dacă $f: I \rightarrow R, x_0 \in I$ este punct de maxim relativ (local) dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât, $\forall x \in V \cap I$, avem $f(x) \leq f(x_0)$.
- Punctele de minim sau maxim relativ ale unei funcții se numesc *puncte de extrem relativ* ale funcției.
- Valorile funcției în punctele de extrem se numesc *extremele* funcției.

Un rol important în determinarea punctelor de extrem ale unei funcții îl are teorema lui Fermat:

- Fie $f: [a, b] \rightarrow R$ o funcție derivabilă. Dacă $x_0 \in (a, b)$ este punct de extrem, atunci $f'(x_0) = 0$ (în punctele de extrem din interiorul intervalului derivata se anulează).

Observații

- a) Reciproca acestei teoreme nu este o propoziție adevărată. Dacă $f'(x_0) = 0, x_0 \in (a, b)$ nu rezultă că x_0 este punct de extrem.
- b) Rezultă din această teoremă că punctele de extrem ale unei funcții derivabile se găsesc printre rădăcinile derivatei.
- c) Dacă $f: I \rightarrow R$, derivabilă, și x_0 se află în interiorul intervalului I cu $f'(x_0) = 0$, atunci:
 - dacă în stânga lui x_0 derivata este negativă, iar în dreapta pozitivă, punctul x_0 este punct de minim;
 - dacă în stânga lui x_0 derivata este pozitivă, iar în dreapta negativă, punctul x_0 este punct de maxim.
- d) Studiul monotoniei funcției și găsirea extremelor folosesc la stabilirea unor inegalități.
- e) Pentru o mai mare ușurință a studiului vom alcătui în majoritatea cazurilor tabelul de variație al funcției.