

Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor

Aplicații

1) Se consideră $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

- a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- b) Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$.

- a) Calculăm $f'(x)$ și apoi soluțiile ecuației $f'(x_0) = 0$. Avem

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}},$$

$$f'(x) = 0, \text{ rezultă } 2 - \ln x = 0, \text{ adică } \ln x = 2 \text{ și } x = e^2.$$

Tabelul de variație al funcției este:

x	0	e^2	∞
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\nearrow M \searrow$	

Funcția dată este strict crescătoare pe $(0, e^2]$ și strict descrescătoare pe $[e^2, \infty)$. Punctul $x_0 = e^2$ este punct de maxim.

- b) Inegalitatea cerută este echivalentă cu $\ln 3^{\sqrt{5}} < \ln 5^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{5} \ln 3 < \sqrt{3} \ln 5$
 $\Leftrightarrow \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 5}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow f(3) < f(5)$ adevărat deoarece $3 < 5 < e^2$ și pe intervalul $(0, e^2]$ funcția este strict crescătoare.

2) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

- a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției.
- b) Să se demonstreze că $f(x) \leq -4$ pentru orice $x < -1$.

- a) Avem $f'(x) = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}$, adică $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ și

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$ cu soluțiile $x = -2$ și $x = 0$. Tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$	-2			-1			0			$+\infty$							
$f'(x)$	$+$			$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$					
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			M	$\searrow$			$-\infty$	∞	$\searrow$			m	$\nearrow$			∞

Pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, -2]$ și $[0, \infty)$, $f'(x) > 0$, deci funcția este strict crescătoare. Pe $[-2, -1]$, și $(-1, 0)$, $f'(x) < 0$ deci funcția este strict descrescătoare.

- b) Pe intervalul $(-\infty, -1]$ punctul $x_0 = -2$ este punct de maxim, iar $f(-2) = -4$ este maximul funcției pe acest interval, deci $f(x) \leq -4$ pentru orice $x < -1$.

3) Se consideră $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$. Să se demonstreze că

$$f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

- Avem $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$.

x	0	2	∞
$f'(x)$	- - -	0 + + +	
$f(x)$			

Cum $x_0 = 2$ este punct de minim, rezultă $f(x) \geq f(2)$, $\forall x \in (0, \infty)$ și cum $f(2) = 2 - 2 \ln 2 = \ln e^2 - \ln 4 = \ln \frac{e^2}{4}$, rezultă $f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

4) Se consideră funcția $f: (-1, \infty)$, $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$. Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$, $\forall x \in (-1, \infty)$.

- Avem $f'(x) = \frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ și $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

x	-1	0	∞			
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$						

Cum $x_0 = 0$ este punct de minim, rezultă $f(x) \geq f(0) = 1$ pentru $\forall x \in (-1, \infty)$.

5) Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Să se demonstreze că $x^e \leq e^x$ pentru orice $x > 0$.

- Inegalitatea cerută devine prin logaritmare $e \ln x \leq x \ln e$, sau, cum $x > 0$, obținem $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e}$. Stabilim extremele funcției.

Avem $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ și $f'(x) = 0 \Rightarrow x = e$.

x	0	e	∞
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$		0	-

Cum $x_0 = e$ este punct de maxim, rezultă $f(x) \leq f(e), \forall x > 0$, deci $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e} \Leftrightarrow x^e \leq e^x$.

6) Se consideră $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

a) Să se demonstreze că f este descrescătoare pe $(0, 2]$.

b) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$.

- a) Avem $f'(x) = \frac{x^2 e^x - 2xe^x}{x^4} = \frac{x e^x (x-2)}{x^4}$. Pentru $x \in (0, 2], f'(x) \leq 0$, deci funcția este descrescătoare.
- b) Inegalitatea se poate scrie $\frac{e^{\sqrt{2}}}{2} \geq \frac{e^{\sqrt{3}}}{3}$, adică $f(\sqrt{2}) \geq f(\sqrt{3})$ adevărat deoarece $0 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$ și pe intervalul $(0, 2]$ funcția este descrescătoare.

7) Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Să se demonstreze că $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$ pentru orice $x \in [\sqrt{e}, \infty)$.

- Calculăm $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1-2 \ln x)}{x^4}$ și $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{e}$.

x	0	$\sqrt{e}$	∞
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$		0	-
		M	0

Cum $f'(x) < 0, x \in (0, \infty)$ rezultă f descrescătoare și deci $f(x) \leq f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}$ și, aplicând regula lui l'Hospital, rezultă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

În concluzie, pentru $x \in [\sqrt{e}, \infty)$ rezultă $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$.

8) Se consideră $f: R - \{1\} \rightarrow R, f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$. Să se demonstreze că funcția admite două puncte de extrem.

- Calculăm $f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+2)}{(x-1)^2}$, adică $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. Ecuația $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ cu rădăcinile $x = -1$ și $x = 3$.

x	$-\infty$	-1	3	∞					
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$			M	$\searrow$			m	$\nearrow$

Din tabelul de variație al funcției, $x_0 = -1$ este punct de minim și $x_0 = 3$ este punct de maxim, deci funcția are exact 2 puncte de extrem.

9) Se consideră $f: R \rightarrow R, f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției.

- Avem $f'(x) = (2x - 2)e^x - (x^2 - 2x + 1)e^x = (x^2 - 1)e^x, f'(x) = 0 \Rightarrow$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ și } x = \pm 1.$$

x	$-\infty$	-1	1	∞					
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$			M	$\searrow$			m	$\nearrow$

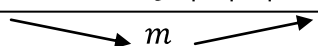
Din tabelul de variație al funcției, $x_0 = -1$ este punct de maxim, iar $x_0 = 1$ punct de minim, deci funcția are 2 puncte de extrem.

10) Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow R, f(x) = \frac{x^4}{4} - \ln x$.

a) Să se determine punctele de extrem ale funcției.

b) Să se demonstreze că $\ln \sqrt{x} \leq \frac{x^2-1}{4}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

- Avem $f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{1}{x} = \frac{x^4-1}{x} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x}$. Ecuația $f'(x) = 0$ are rădăcinile ± 1 , dar $x \in (0, \infty)$, deci convine numai $x = 1$.

x	0	1	∞
$f'(x)$	- - -	0 + + +	
$f(x)$			

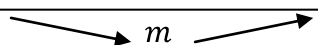
Rezultă că f are un unic punct de minim $x_0 = 1$ și avem $f(x) \geq f(1)$ pentru orice

$x \in (0, \infty)$, adică $\frac{x^4}{4} - \ln x \geq \frac{1}{4}$, $\forall x \in (0, \infty)$. Dacă înlocuim x cu $\sqrt{x}$ rezultă

$$\frac{x^2}{4} - \ln \sqrt{x} \geq \frac{1}{4} \text{ sau } \ln \sqrt{x} \leq \frac{x^2-1}{4}.$$

- 11) Se consideră $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$. Să se demonstreze că $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$ pentru orice $x > 0$.

- Avem $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ care nu convine și $\ln x = -\frac{1}{2}$, de unde $x = e^{-\frac{1}{2}}$ sau $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Tabelul de variație al funcției:

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	∞
$f'(x)$	- - -	0 + + +	
$f(x)$			

Rezultă $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ punct de minim, deci $f(x) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Cum

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}, \text{ avem că } f(x) \geq -\frac{1}{2e}, \forall x \in (0, \infty).$$

- 12) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - x \ln 2$. Să se determine punctele de extrem ale funcției.

- Cum $f'(x) = 2^x \ln 2 - \ln 2 = (2^x - 1) \ln 2$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 2^x = 1$ și $x = 0$. Avem tabelul de variație:

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	$- - -$	0	$+ + +$
$f(x)$	$\swarrow$ m $\searrow$		

din care rezultă că $x_0 = 0$ este punct de minim.

- 13) Se consideră $f: R^* \rightarrow R, f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției.

- Avem $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, rezultă $f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = 3 \cdot \frac{x^4 - 1}{x^2} = \frac{3(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2}$ cu rădăcinile ± 1 . Avem

x	$-\infty$	-1	1	∞
$f'(x)$	$+ + +$	0	$- - -$	$0 + + +$
$f(x)$	$\swarrow$ M $\searrow$ m $\swarrow$			

Pe $(-\infty, -1)$, $f' > 0$, deci f crescătoare, pe $(-1, 1)$, $f' < 0$, deci f descrescătoare, iar pe $(1, \infty)$, $f' > 0$, deci f crescătoare.

- 14) Se consideră $f: R \rightarrow R, f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Să se demonstreze că funcția este crescătoare pe R .

- Funcția este crescătoare pe R dacă $f'(x) > 0, \forall x \in R$. Avem
 $f'(x) = 3^x \ln 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2}$. Cum $\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$, rezultă
 $f'(x) = 3^x \ln 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln 2 > 0, \forall x \in R$, deci f este crescătoare pe R .

- 15) Se consideră $f: R \rightarrow R, f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$. Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{e}$ pentru orice $x \leq 2$.

- Calculăm $f'(x) = \frac{(2x-1)e^x - (x^2-x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{(-x^2+3x-2)e^x}{e^{2x}}$ și $f'(x) = 0$ pentru $-x^2 + 3x - 2 = 0$ cu rădăcinile 1 și 2. Tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$	1	2	∞		
$f'(x)$	- - -	0	+	+	0	- - -
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	m		M			

Pentru $x \leq 2$ avem $x_0 = 1$ punct de minim, deci $f(x) \geq f(1), \forall x \leq 2$. Cum $f(1) = \frac{1}{e}$, rezultă $f(x) \geq \frac{1}{e}, \forall x \leq 2$.

16) Fie funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$. Să se arate că $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$ pentru orice $x > 0$.

- Avem $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$ cu rădăcina $x = 1$.

x	0	1	∞
$f'(x)$	- - -	0	+ + +
$f(x)$	$\swarrow$		$\searrow$
	m		

Rezultă $x_0 = 1$ punct de minim și deci $f(x) \geq f(1)$. Cum $f(1) = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x} - \ln x \geq 2$ sau $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$.

17) Se consideră funcția $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Să se arate că $f(\sqrt[3]{2}) \geq f(\sqrt[3]{3})$.

- Avem $f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ cu rădăcinile $x = 0$ și $x = 2$. Tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$	0	2	∞							
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↗ M ↘ m ↗										

Pe intervalul $[0, 2], f' < 0$, deci funcția este descrescătoare. Cum $0 < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3} < 2$, rezultă $f(\sqrt[3]{2}) \geq f(\sqrt[3]{3})$.

18) Se consideră $f: R \rightarrow R, f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. Să se arate că $f(\sqrt[3]{2012}) < f(\sqrt[3]{2013})$.

• Avem $f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^3+x^2+x-1-2x^3+x^2-x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$

cu rădăcinile ± 1 .

x	$-\infty$	-1	1	∞					
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$									

Pe intervalul $(1, \infty)$ funcția este strict crescătoare. Cum $1 < \sqrt[3]{2012} < \sqrt[3]{2013}$, rezultă $f(\sqrt[3]{2012}) < f(\sqrt[3]{2013})$.

19) Se consideră $f: (1, \infty) \rightarrow R, f(x) = \frac{e^x}{x-1}$. Să se arate că $f(x) \geq e^2$ pentru orice $x > 1$.

• Avem $f'(x) = \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$ și din $f'(x) = 0$ rezultă $x = 2$.

x	1	2	∞
$f'(x)$	- - -	0	+ + +
$f(x)$			

Rezultă $x_0 = 2$, punct de minim, deci $f(x) \geq f(2)$ pentru orice $x > 1$.

Cum $f(2) = e^2$, avem $f(x) \geq e^2, \forall x > 1$.

20) Se consideră $f: (0, \infty) \rightarrow R, f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x}$. Să se arate că $\frac{x+2}{3} \geq \sqrt[3]{x}$ pentru orice $x > 0$.

• Avem $f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}$ cu rădăcina $x = 1$ și tabelul de variație

x	0	1	∞
$f'(x)$	- - -	0	+ + +
$f(x)$	m		

Rezultă $x_0 = 1$ este punct de minim și deci $f(x) \geq f(1)$ pentru orice $x > 0$.

Cum $f(1) = 0$, avem $f(x) \geq 0, \forall x > 0$, adică $x + 2 \geq 3\sqrt[3]{x}$ și $\frac{x+2}{3} \geq \sqrt[3]{x}, \forall x > 0$.

21) Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x - 1$.

a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției.

b) Să se arate că $e^{2012} - 1 \geq 1006 \cdot 2012 (e - 1)$.

- a) Cum $f'(x) = e^x - 1$ cu rădăcina $x = 0$, avem tabelul de variație:

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	$- - -$	0	$+$
$f(x)$	$\swarrow$ m $\searrow$		

Pe intervalul $(-\infty, 0)$, $f' < 0$, deci f descrescătoare, iar pe $(0, \infty)$, $f' > 0$, deci f crescătoare.

- b) Cum $x_0 = 0$ este punct de minim, rezultă $f(x) \geq f(0) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și deci $e^x - x - 1 \geq 0$, adică $e^x \geq x + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ sau, pentru $x = k$, $e^k \geq k + 1$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Dăm lui k valori de la 0 la 2011 și însumăm.

Obținem:

$$\sum_{k=0}^{2011} e^k \geq \sum_{k=0}^{2011} (k + 1)$$

Cum prima sumă este suma unei progresii geometrice cu 2012 termeni, $a_1 = 1$ și $q = e$, rezultă $\frac{e^{2012} - 1}{e - 1} \geq \frac{2012 \cdot 2013}{2}$ sau $e^{2012} - 1 \geq 1006 \cdot 2013(e - 1)$ deoarece $e - 1 > 0$.