

Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

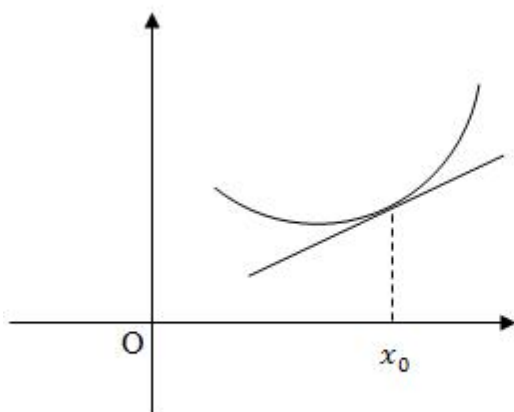
Reamintim:

1. Funcția $f: I \rightarrow R$ este de două ori derivabilă în punctul $x_0 \in I$ dacă este derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0 și funcția f' este derivabilă în x_0 . În acest caz, derivata funcției f' se numește *derivata de ordin doi* (sau derivata a doua) a funcției în x_0 și se notează $f''(x_0)$.

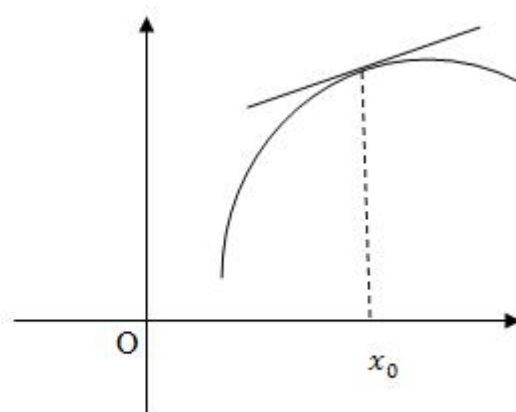
Observație: Dacă f' este derivabilă pe $J \subset I$, atunci funcția este de două ori derivabilă pe J .

2. Fie funcția $f: I \rightarrow R$ o funcție derivabilă pe I .

- Funcția f se numește *convexă* pe I dacă tangenta în orice punct al graficului funcției se află sub grafic.
- Funcția f se numește *concavă* pe I dacă tangenta în orice punct al graficului funcției se află deasupra graficului.



Funcție convexă



Funcție concavă

Pentru studiul convexității și concavității unei funcții $f: I \rightarrow R$, de două ori derivabilă pe I , se poate utiliza semnul derivatei a doua pe acest interval, folosind următoarea teoremă:

- Fie $f: I \rightarrow R$ o funcție de două ori derivabilă pe I . Atunci:

1) funcția f este convexă pe intervalul I dacă și numai dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$;

2) funcția f este concavă pe intervalul I dacă și numai dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$.

Rezultă că determinarea intervalelor de convexitate și concavitate ale unei funcții de două ori derivabile revine la stabilirea semnului derivatei a doua.

Aplicații

1) Se consideră $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 2 \ln x$. Să se demonstreze că funcția este convexă pe intervalul $(0, \infty)$.

- Avem $f'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{x}$. Cum $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, rezultă $f''(x) = \frac{2}{x^2} > 0, \forall x \in (0, \infty)$ și deci f este convexă pe intervalul $(0, \infty)$.

2) Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + x^2$. Să se arate că funcția este convexă pe $\mathbb{R}$.

- Cum $f'(x) = e^x + 2x$ și $f''(x) = e^x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că funcția este convexă pe $\mathbb{R}$.

3) Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2012} + 2012^x$. Să se demonstreze că funcția este convexă pe $\mathbb{R}$.

- Avem $f'(x) = 2012x^{2011} + 2012^x \cdot \ln 2012$ și $f''(x) = 2012 \cdot 2011 \cdot x^{2010} + 2012^x \cdot (\ln 2012)^2$.
Cum $x^{2010} > 0, \forall x \in \mathbb{R}, 2012^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și f este convexă pe $\mathbb{R}$.

4) Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{1}{e^x}$. Să se arate că funcția este concavă pe $\mathbb{R}$.

- Reamintim că $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$. Rezultă $\left(\frac{1}{e^x}\right)' = -\frac{e^x}{(e^x)^2} = -\frac{1}{e^x}$ și deci $f'(x) = 1 + \frac{1}{e^x}, f''(x) = -\frac{1}{e^x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde f este concavă pe $\mathbb{R}$.

5) Se consideră $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Să se demonstreze că funcția este concavă pe intervalul $(0, \infty)$.

- Avem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ și $f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$. Pentru $x > 0, f''(x) < 0$ și deci f este concavă pe intervalul $(0, \infty)$.

6) Se consideră $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$. Să se arate că funcția este convexă pe intervalul $(0, \infty)$.

- Avem $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ și $f''(x) = \frac{1}{x}$. Cum $x \in (0, \infty)$, rezultă $f''(x) > 0$ și deci f este convexă pe intervalul $(0, \infty)$.

7) Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x + 3^x$. Să se arate că funcția este convexă pe $\mathbb{R}$.

- Cum $(a^x)' = a^x \ln a$, rezultă $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3$ și $f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 + 3^x (\ln 3)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$.

8) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Să se stabilească intervalele de convexitate și concavitate ale funcției.

- Derivând ca un cât, avem $f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2+1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ și $f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2-1)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4}$, adică $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Dacă $x \in (-\infty, 0)$, rezultă $x^3 < 0, f''(x) < 0$ și deci f concavă pe $(-\infty, 0)$. Dacă $x \in (0, \infty)$, rezultă $x^3 > 0, f''(x) > 0$ și deci f convexă pe $(0, \infty)$.

9) Fie $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Să se determine intervalele de concavitate și convexitate ale funcției.

- Avem $f'(x) = 6x^2 - 6x$ și $f''(x) = 12x - 6, f''(x) = 0$, rezultă $x = \frac{1}{2}$ și tabelul de semn pentru f'' este

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	∞
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Pentru $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right], f''(x) \leq 0$, deci f concavă pe $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

Pentru $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$, $f''(x) \geq 0$, deci f convexă pe $[\frac{1}{2}, \infty)$.

10) Fie $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)e^x$. Să se determine intervalele de concavitate și convexitate ale funcției.

- Avem, folosind regula de derivare a produsului:

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 + 1)e^x = (2x + x^2 + 1)e^x \text{ și}$$

$$f''(x) = (2 + 2x)e^x + (x^2 + 2x + 1)e^x = (x^2 + 4x + 3)e^x, f''(x) = 0,$$

rezultă $x = -1, x = -3$. Tabelul de variație pentru f'' este

x	$-\infty$	-3	-1	∞						
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Pentru $x \in (-\infty, -3]$, $f''(x) \geq 0$, deci f convexă pe $(-\infty, -3]$.

Pentru $x \in [-3, -1]$, $f''(x) \leq 0$, deci f concavă pe $[-3, -1]$.

Pentru $x \in [-1, \infty)$, $f''(x) \geq 0$, deci f convexă pe $[-1, \infty)$.

Observație: Punctele $x_0 = -1, x_0 = -3$ în care funcția își schimbă concavitatea se numesc *puncte de inflexiune*. Așadar punctele de inflexiune se găsesc printre rădăcinile celei de a doua derivate a unei funcții de două ori derivabile.